Sintesi di Matematica a cura di Gabriella Graziano

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

1) Raccoglimento a fattore comune (Applicabile ad un polinomio di un numero qualunque di termini purchè i termini presentino almeno una lettera o un numero che si ripete in tutti)

2) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ 3) $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$	BINOMI

4) $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ 5) $A^2 \pm pA + q = (A + x1)(A + x2)$ essendo x1 e x2 due numeri tali che $x1 \cdot x2 = q$ e $x1 + x2 = p$	TRINOMI

6) $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$ 7) MESSA IN EVIDENZA PARZIALE	QUADRINOMI

8) $A^2 + B^2 + C^2 \pm 2AB \pm 2AC \pm 2BC = (A \pm B \pm C)^2$	POLINOMI DI 6 TERMINI

9) RUFFINI comune (Applicabile ad un polinomio di un numero qualunque di termini purchè i termini contengano una sola lettera)

ESEMPI SVOLTI

TIPO 1)

- $xy^2 + x^3y - x^5$ Il polinomio è di tipo 1) infatti nei 3 termini si ripete x. In tal caso si procede scrivendo al di fuori di una parentesi la lettera che si ripete con l'esponente più piccolo e all'interno della parentesi i quozienti di ciascun termine del polinomio da scomporre per il fattore scritto al di fuori della parentesi). Per cui si ha:

  $xy^2 + x^3y - x^5 = x(y^2 + x^2y - x^4)$

- $7a^4b^2 - a^3b = a^3b(7a - 1)$

  Se non si ripetono lettere ma numeri, oppure se oltre alle lettere si ripetono anche numeri, come fattore esterno alla parentesi va messo il MCD dei numeri)

- $5x + 15 = 5(x + 3)$

- $3a^2y - 9y^2a = 3ay(a - 3y)$

- $\frac{20}{3}x^{15} + \frac{10}{3}x^{10} - \frac{5}{3}x^5 = \frac{5}{3}x^5(4x^{10} + 2x^5 - 1)$

- $\frac{1}{3}ab + \frac{4}{3}a = \frac{1}{3}a(b + 4a)$

TIPO 2)

- $x^2 - 25y^4$ Il polinomio è di tipo 2). Infatti è una differenza di quadrati. In tal caso si considera la somma per la differenza delle basi dei quadrati

  $x^2 - 25y^4 = (x - 5y^2)(x + 5y^2)$

- $a^2x^2 - 1 = (ax - 1)(ax + 1)$

- $36a^6 - 25x^{10} = (6a^3 - 5x^5)(6a^3 + 5x^5)$

TIPO 4)

- $9 - 6x + x^2$. Il polinomio è di tipo 3). Infatti contiene 2 quadrati (che sono 9 e x^2) e il doppio prodotto delle basi dei quadrati(che è -6*x*).

$9-6x+x^2=(3-x)^2$

- $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

- $4a^2+2ab+\frac{1}{4}b^2=\left(2a+\frac{1}{2}b\right)^2$

- $-2ab+a^2b^2+1=(ab-1)^2$

TIPO 6)

- $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$. Il polinomio è di tipo 6) . Infatti contiene 2 cubi (che sono x^3 e $8y^3$) e due tripli prodotti (che sono $6x^2y \; e \; 12xy^2$)

- $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$

- $x^3-9x^2+27x-27=(x-3)^3$

TIPO 3)

- b^3+z^3 Il polinomio è di tipo 3). Infatti è una somma di cubi. In tal caso si considera la somma delle basi dei cubi per il trinomio contenente i quadrati delle basi e il prodotto delle basi considerato con segno meno per la somma e con segno + per la differenza

  $b^2+z^2=(b+z)(b^2+bz+z^2)$

- $\frac{1}{8}-125a^3=\left(\frac{1}{2}-5a\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{2}a+25a^2\right)$

TIPO 5)

- $a^2-11a+18=(a-2)(a-9)$ Infatti -2 x (-9)= 18 e -2 + (-9) = -11

- $y^2-3a-4=(y-4)(y+1)$ Infatti -4 x 1 = -4 e -4 + 1 = - 3

TIPO 7)

- $y+x-yb-xb=$ tra il primo e terzo termine si ripete y e tra il secondo e il quarto si ripete x. Si può quindi scomporre per raccoglimento totale la parte $y-yb$ e si ha:

  $y-yb=y(1-b)$ e la parte $x-xb$ e si ha: $x-xb=x(1-b)$. Tutto il polinomio diventa allora:

  $y+x-yb-xb=y(1-b)+x(1-b)$ Poiché ora si ripete la parentesi $(1-b)$ la si mette in evidenza, cioè la si scrive al di fuori di una seconda parentesi all'interno della quale vanno i fattori rimanenti. Si ha quindi : $y+x-yb-xb=y(1-b)+x(1-b)=(1-b)(y+x)$

- $y + x - yb - xb = y(1 - b) + x(1 - b)$

- $\underline{a^2} - \underline{a^3} + \underline{\underline{2}} - \underline{\underline{2a}} = a^2(1 - a) + 2(1 - a) = (1 - a)(a^2 + 2)$

- $4x - y + \underline{\underline{2}} - 2xy = 2(2x + 1) - y(2x + 1) = (2x + 1)(2 - y)$

- $3x^2y - 2y - 6x^3 + 4x = y(3x^2 - 2) - 2x(3x^2 - 2) = (3x^2 - 2)(y - 2x)$

TIPO 8)

- $x^2 + 4 + 25y^2 + 4x - 10xy - 20y = (x + 2 - 5y)^2$

PIU' TIPOLOGIE INSIEME (Si parte sempre dal raccoglimento a fattore comune)

- $5x^2y - 20y^3 = 5y(x^2 - 4y^2) = 5y(x + 2y)(x - 2y)$

- $b^3 - 4b^2 + 4b = b(b^2 - 4b + 4) = b(b - 2)^2$

- $16b^2 - 81 = (4b^2 - 9)(4b^2 + 9) = (2b - 3)(2b + 3)(4b^2 + 9)$

- $a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$

CASI PARTICOLARI DI TIPO 2)

- $(x - 3)^2 - 9$ E' differenza di quadrati con $A^2 = (x - 3)^2$ e $B^2 = 9$ Per cui si ha:

- $(x - 3)^2 - 9 = [(x - 3) + 3] \cdot [(x - 3) - 3]$

CASI PARTICOLARI DI TIPO 1)

- $ab(x - 3) - 2(x - 3)$ Si ripete (x – 3) e quindi si ha :

  $ab(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(ab - 2)$.

- $5(x - 3)^2 - 2x(x - 3)$ Si ripete (x – 3) e quindi si ha :

  $5(x - 3)^2 - 2x(x - 3) = (x - 3) \cdot [5(x - 3) - 2x]$

CASI PARTICOLARI DI TIPO 7)

- $x^2 + 25y^2 - 10xy - 9 = (x - 5y)^2 - 3^2$ (raggruppando i primi tre). Cioè si tratta del tipo 2) con $A^2 =$ $= (x - 5y)^2$ e $B^2 = 9$ e quindi la scomposizione è la seguente:

  $$x^2 + 25y^2 - 10xy - 9 = (x - 5y)^2 - 3^2 = [(x - 5y) + 3] \cdot [(x - 5y) - 3]$$

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI MEDIANTE REGOLA DI RUFFINI

<u>PREMESSA</u>: REGOLA DI RUFFINI

La regola generale per determinare quoziente e resto della divisione tra due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ può essere semplificata quando il divisore è un binomio di primo grado con coefficiente della variabile uguale a 1 e cioè del tipo x – c. In questo la procedura prende il nome di Regola di Ruffini che illustriamo con un esempio.

Si voglia trovare il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione tra il polinomio $A(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ e il binomio di primo grado $B(x) = x - 2$.

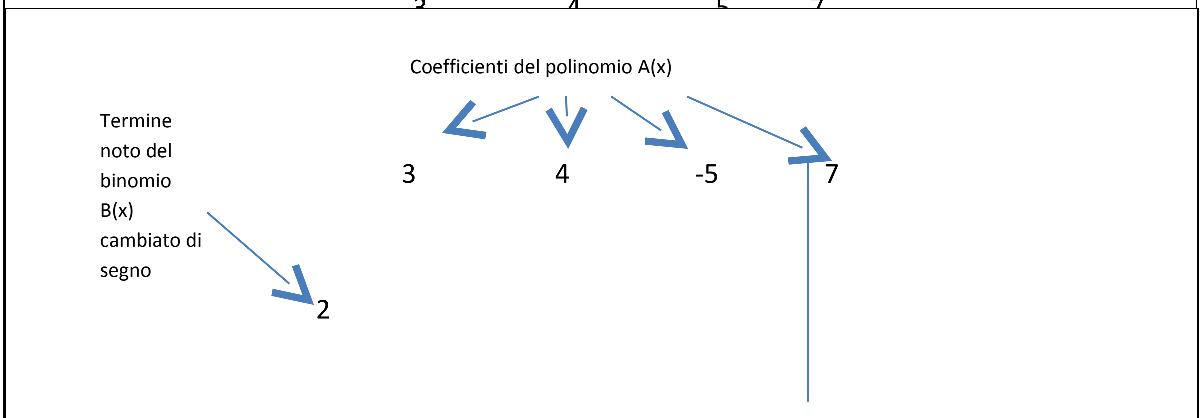
SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI MEDIANTE REGOLA DI RUFFINI

<u>PREMESSA</u>: REGOLA DI RUFFINI

La regola generale per determinare quoziente e resto della divisione tra due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ può essere semplificata quando il divisore è un binomio di primo grado con coefficiente della variabile uguale a 1 e cioè del tipo x – c. In questo la procedura prende il nome di Regola di Ruffini che illustriamo con un esempio.

Si voglia trovare il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione tra il polinomio $A(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ e il binomio di primo grado $B(x) = x - 2$.

Predisponiamo il seguente schema:



	3	4	-5	7
2		6		
	3	10		

A sua volta il 10 va moltiplicato per 2 e il risultato ottenuto va posizionato al di sotto del terzo coefficiente e cioè -5

	3	4	-5	7
2		6	20	
	3	10		

E, al di sotto della linea orizzontale, nella stessa colonna, va posizionata la somma di -5 e 20

	3	4	-5	7
2		6	20	
	3	10	15	

Ora il 15 moltiplica il 2 e il risultato ottenuto va posizionato al di sotto del termine noto e cioè 7

	3	4	-5	7
2		6	20	30
	3	10	15	

Infine si addizionano i termini dell'ultima colonna ottenuta e il risultato si posiziona al di sotto della linea orizzontale

	3	4	-5	7

2	6	20	30
3	10	15	37

Il numero 37 è il resto della divisione R(x) = 37

I numeri contenuti al di sotto della linea orizzontale tranne 37 e cioè 3; 10; 15 sono i coefficienti del polinomio quoziente $Q(x) = 3x^2 + 10x + 15$

Si noti che la parte letterale si ottiene partendo dal grado di A(x) diminuito di 1 e andando a decrescere.

Nell'esempio precedente A(x) è un polinomio completo e cioè sono presenti tutte le potenze da 3 a 0.

Se il polinomio non è completo va completato. Ad esempio: $A(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 8$ Il polinomio è incompleto perché

Si completa nel modo seguente : $A(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 + 0x - 8$. Se B(x) = x + 1 si ha

	2	-1	-5	0	-8
-1		-2	3	2	-2
	2	-3	-2	2	-10

Il quoziente è $Q(x) = 2x^3 -3x^2 -2x +2$ e il resto è -10