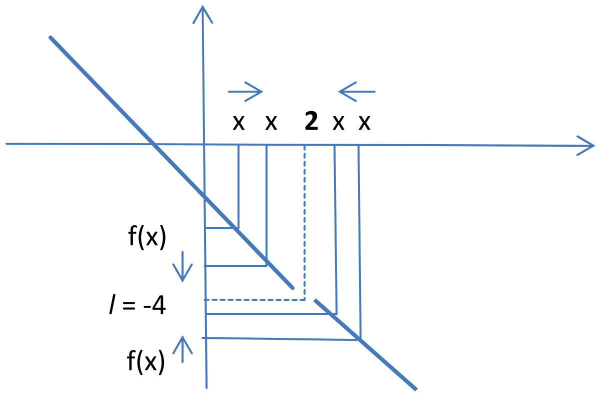
LIMITE FINITO PER X CHE TENDE AD UN VALORE FINITO

Sia $f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}$. Vogliamo studiare il comportamento della funzione vicino al punto $x_0 = 2$ dove non è definita. La tabella seguente mostra come f(x) si avvicina al valore finito *l* = 4, quando x si approssima al valore 2.

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	**→2←**	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	-3,9	-3,99	-3,999	-3,9999	**→-4←**	-4,0001	-4,001	-4,01	-4,1

Graficamente la situazione è la seguente:



Lo strumento matematico che permette con precisione di stabilire la proprietà rappresentata in figura e cioè, più scegliamo x vicino al valore $x_0 = 2$ e più la sua immagine f(x) si avvicina al valore finito *l* =- 4, prende il nome di limite finito *l* al tendere di x ad un valore finito x_0. In simboli:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -4$$

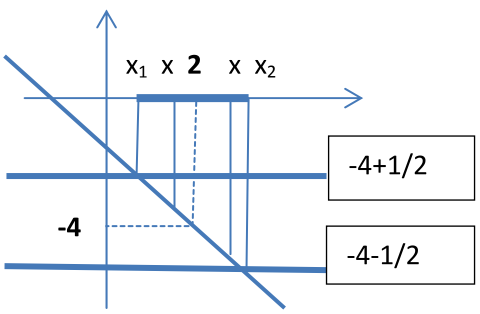
In generale: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

La definizione è la seguente:

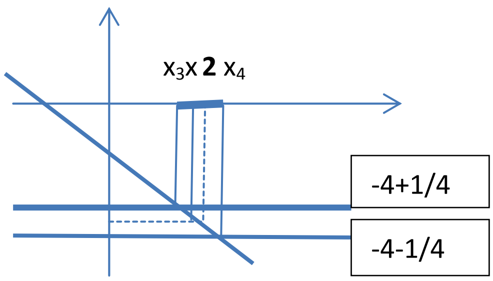
Considerato un numero reale positivo ε piccolo a piacere, esiste un intorno di x_0 tale che, per tutte le x appartenenti a tale intorno, risulti $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ciò vuol dire che troviamo x vicine ad x_0 le cui immagini differiscono da *l* meno di ε e, potendo scegliere ε piccolo quanto si vuole, ciò vuol dire che esistono x vicine ad x_0 le cui f(x) differiscono da *l* di pochissimo.

Esempio

Se scelgo ε = 1/2, l'intorno di x_0 è : $]x1; x2[$



Se scelgo ε = 1/4 l'intorno è : $]x3; x4[$



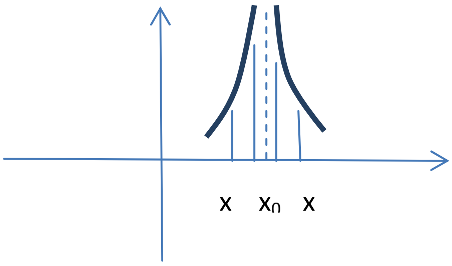
Continuando a diminuire ε,(ad esempio 1/8; 1/10; 1/1000……) si hanno f(x) che distano da -4 meno di 1/8; 1/10; 1/100……..e cioè pochissimo)

LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE F(X) PER X CHE TENDE AD UN VALORE FINITO X_0

IL LIMITE è $+\infty$

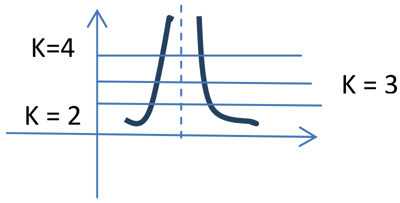
Per valori di x che si avvicinano ad x_0, i corrispondenti valori della funzione, crescono sempre più.

Tale proprietà è rappresentata nel grafico seguente:



In simboli: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

La definizione è: considerato un numero K grande a piacere, esiste un intorno di x_0 tale che, per tutte le x appartenenti a tale intorno risulti f(x) > K

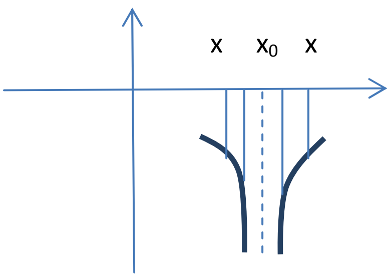


Possiamo continuare ad aumentare K ma troviamo sempre delle x vicine ad x_0 le cui corrispondenti f(x) sono maggiori di K e, potendo

aumentare K all'infinito, dire che esistono f(x) > K vuol dire che esistono f(x) indefinitamente grandi (tendenti a + infinito)

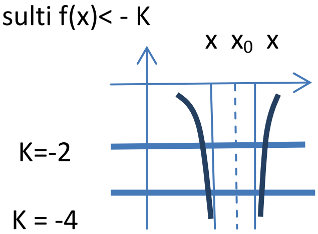
IL LIMITE è $-\infty$

Per valori di x che si avvicinano ad x_0, i corrispondenti valori della funzione, decrescono sempre più.



In simboli: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

La definizione è: considerato un numero K grande a piacere, esiste un intorno di x_0 tale che, per tutte le x appartenenti a tale intorno risulti f(x)< - K

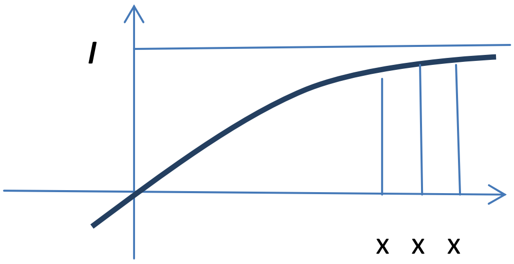


Possiamo continuare ad aumentare K ma troviamo sempre delle x vicine ad x_0 le cui corrispondenti f(x) sono minori di -K e, potendo

aumentare K all'infinito, dire che esistono f(x) < - K vuol dire che esistono f(x) negative indefinitamente piccole (tendenti a – infinito)

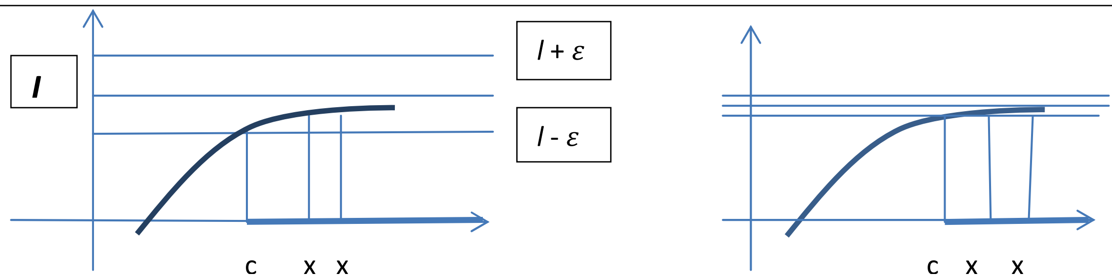
LIMITE FINITO PER X CHE TENDE AD UN VALORE INFINITO (x tende a +∞)

Al crescere dei valori di x , f(x) si avvicina ad un valore finito *l*



In simboli: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

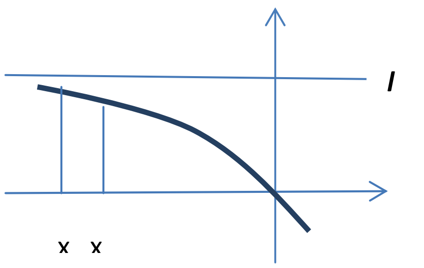
La definizione è: comunque si considera un numero ε piccolo quanto si vuole, si trova un numero c tale che, per tutte le x >c risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$ e cioè f(x) differisce da *l* meno di ε e quindi pochissimo.



Diminuendo ε , diminuisce la differenza tra f(x) e ***l*** cioè tale differenza tende a 0.

LIMITE FINITO PER X CHE TENDE AD UN VALORE INFINITO (x tende a -∞)

Al decrescere dei valori di x , f(x) si avvicina ad un valore finito *l*



In simboli: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

La definizione è: comunque si considera un numero ε piccolo quanto si vuole, si trova un numero c tale che, per tutte le x <-c risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$ e cioè f(x) differisce da *l* meno di ε e quindi pochissimo.