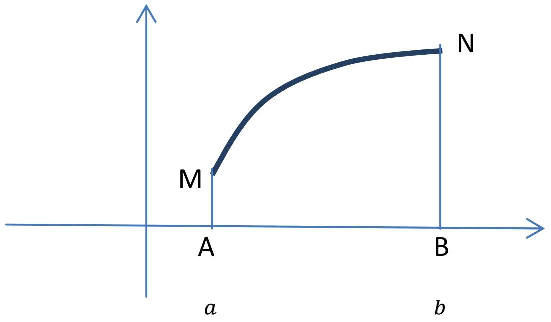
Area del trapezoide

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo [a ; b] e supponiamo che in tale intervallo sia positiva.

Consideriamo il quadrilatero mistilineo ABNM delimitato dalla curva di equazione $y = f(x)$, dall'asse x e dalle parallele AM e BN all'asse y. Tale quadrilatero si chiama **trapezoide.**



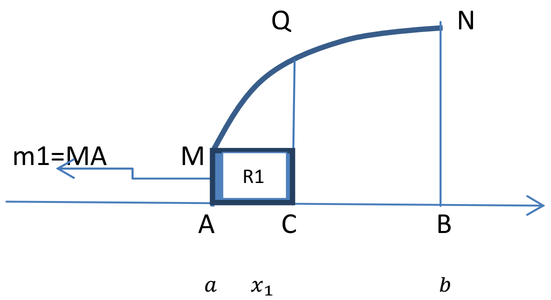
Definizione di area del trapezoide ABMN

Dividiamo l'intervallo [a ; b] in un numero n di parti uguali e, detta h l'ampiezza di ciascuna di queste parti uguali, consideriamo le seguenti somme:

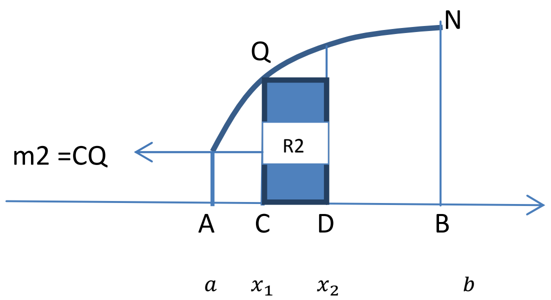
$$s_n = m_1h + m_2h + \cdots \ldots\ldots m_nh$$

$$S_n = M_1h + M_2h + \cdots \ldots\ldots\ldots .M_nh$$

dove m_1 indica il minimo della funzione nel primo intervallino AC e cioè f(a) = AM e m_1h l'area del rettangolo R1 di base AC

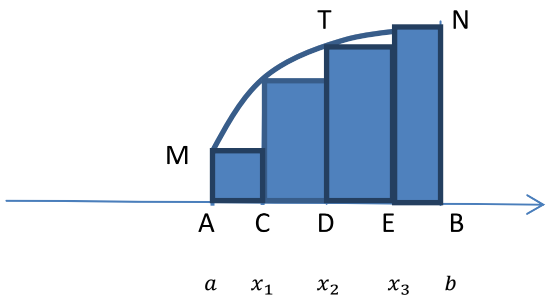


dove m_2 indica il minimo della funzione nel primo intervallino CD e cioè f(x1) = QC e m_2h l'area del rettangolo R2 di base CD



E così via

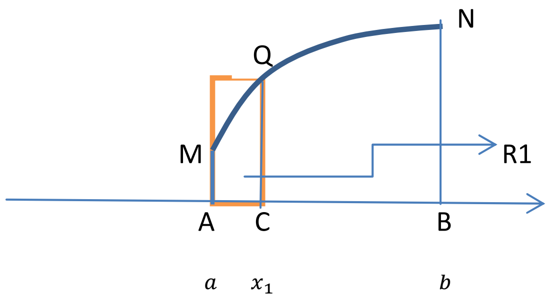
Quindi s_n è la somma delle aree dei rettangoli aventi per base , rispettivamente, gli intervallini in cui è stato suddiviso l'intervallo [a; b] e per altezze le ordinate minime m_i dei punti della curva in tali intervallini.



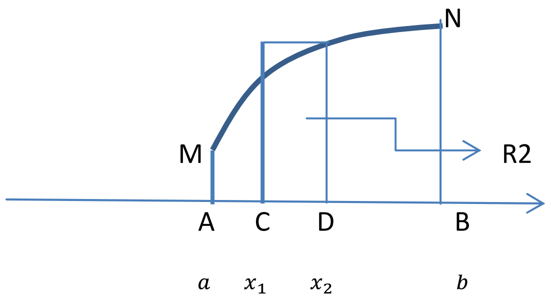
La figura unione dei rettangoli così definiti si chiama plurirettangolo inscritto nel trapezoide

Mentre in $S_n = M_1 h + M_2 h + \cdots \ldots \ldots \ldots . M_n h$

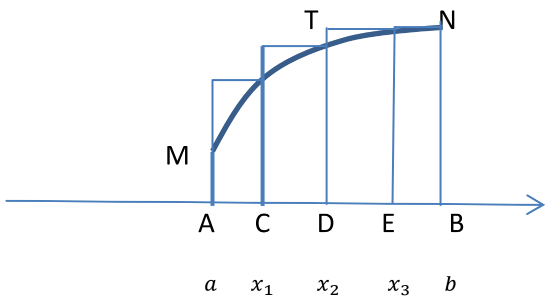
M_1 indica il massimo della funzione nel primo intervallino AC e cioè f(x1) = QC e $M1h$ l'area del rettangolo R1 di base AC



M_2 indica il massimo della funzione nel secondo intervallino CD e cioè f(x1) = QC e $M_2 h$ l'area del rettangolo R2 di base CD



E così via. Quindi S_n è la somma delle aree dei rettangoli aventi per base , rispettivamente, gli intervallini in cui è stato suddiviso l'intervallo [a; b] e per altezze le ordinate massime M_i dei punti della curva in tali intervallini



Osserviamo che risulta, evidentemente, qualunque sia n: $s_n \leq S_n$.

Inoltre, data la funzione f(x), ad ogni valore fissato per n viene a corrispondere un ben determinato valore per s_n e per S_n e possiamo considerare le seguenti successioni numeriche:

$$s_1,\ s_2, \dots \dots \dots \dots ..s_n ,\dots\dots\dots$$

$$S_1,\ S_2, \dots \dots \dots \dots ..S_n ,\dots\dots\dots$$

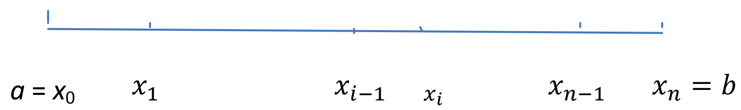
Si dimostra il seguente **teorema** : Se f(x) è una funzione continua e positiva in [a;b], le due successioni sono tali che: $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Se esiste un numero da definirsi come area del trapezoide ABNM, esso dovrà, in accordo con le proprietà intuitive dell'area , essere un numero compreso tra $s_n\ e\ S_n$

Definizione Si chiama area del trapezoide ABNM delimitato dalla curva di equazione y = f(x) , con f(x) > 0, dall'asse x e dalle parallele AM e BN all'asse y, il numero che rappresenta il limite comune delle due successioni.

Integrale definito (definizione)

Sia $y = f(x)$ una funzione definita nell'intervallo [a;b] e ivi continua(Si osservi che a differenza dell'area del trapezoide non si suppone f > 0). Dividiamo l'intervallo [a;b] in un numero n di parti uguali intercalando i punti $x_1 < x_2 < \dots\dots < x_{n-1}$ e $x_0 = a$ e $x_n = b$ e indichiamo con h l'ampiezza comune di questi intervalli, cioè poniamo h = $\frac{b-a}{n}$.



Siano m_i e M_i rispettivamente il minimo e il massimo valore della funzione f(x) nell' i^{mo} intervallino $[x_{i-1};x_i]$ e consideriamo le seguenti somme:

$$s_n = m_1h + m_2h + \cdots \dots ..m_nh$$

$$S_n = M_1h + M_2h + \cdots \dots \dots \dots .M_nh$$

Risulta, evidentemente, qualunque sia n : $s_n \leq S_n$

Data la funzione f(x), ad ogni valore fissato per n viene a corrispondere un ben determinato valore per s_n e per S_n e possiamo considerare le seguenti successioni numeriche:

$$s_1,\ s_2, \dots \dots \dots \dots ..s_n ,\dots\dots\dots$$

$$S_1,\ S_2, \dots \dots \dots \dots ..S_n ,\dots\dots\dots$$

Si dimostra il seguente **teorema** : Se f(x) è una funzione continua e positiva in [a;b], le due successioni sono tali che: $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$

Premesso ciò, si pone la seguente **definizione**: Il valore comune del limite delle due successioni si chiama **integrale definito** della funzione f(x) esteso all'intervallo [a;b] e si indica con il simbolo: $\int_a^b f(x)dx$

I numeri a e b si chiamano estremi di integrazione e precisamente a è detto estremo inferiore e b estremo superiore . La funzione f(x) si chiama funzione intreganda . Per definizione si ha quindi :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Vedremo più avanti come si riesca a determinare tale numero evitando il calcolo del limite.

Proprietà dell'integrale definito

Premettiamo una definizione: se a > b si pone per definizione $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Si attribuisce così un significato al simbolo di integrale definito anche quando l'estremo inferiore è maggiore dell'estremo superiore.

Per definizione si pone anche: $\int_a^a f(x)dx = 0$

Premesso ciò enunciamo i seguenti teoremi:

I) Se a, b e c sono punti qualunque di un intervallo nel quale f(x) sia continua, risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

II) Se f(x) e g(x) sono funzioni continue nell'intervallo [a;b] si ha:

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

III) Se c è una costante e f(x) una funzione continua in [a;b] , risulta:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Relazione tra integrale definito e integrale indefinito

Calcolata una primitiva F(x) della funzione integranda f(x), l'integrale definito tra a e b di f(x) è dato dalla differenza dei valori assunti da f(x), rispettivamente , nell'estremo superiore b e nell'estremo inferiore a dell'integrale stesso: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

In base a quanto detto si ha quindi il calcolo di un integrale definito può essere ricondotto a quello di un integrale indefinito.