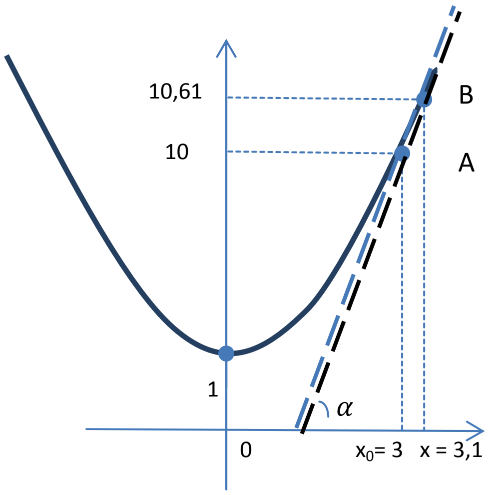
LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE (significato geometrico)



Consideriamo la funzione $y = f(x) = x^2 + 1$ e il punto x_0 = 3

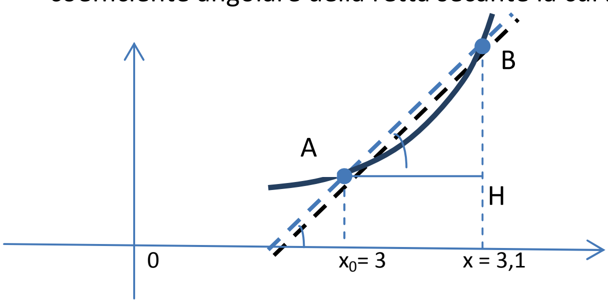
Osserviamo che : f(x_0) = f(3) = $3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$.

Incrementiamo x_0 = 3 di 0,1 e consideriamo l'ascissa x = 3 + 0,1 = 3,1.

Osserviamo che f(x) = f(3 + 0,1) =f(3,1) =$3{,}1^2 + 1 = 10{,}61$.

Diciamo che x – x_0 = 0,1 è l'incremento della variabile indipendente e si indica con Δx e y – y_0 = f(x) – f(x_0) = 10,61-10 = 0,61, è l'incremento della variabile dipendente y e si indica con Δf.

Il rapporto degli incrementi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ossia $\frac{10{,}61-10}{3{,}1-3}$ viene detto **rapporto incrementale** ed è il coefficiente angolare della retta secante la curva passante per A e B e cioè $tg\alpha$. Infatti conducendo per A



la parallela all'asse x, si ottiene un triangolo AHB retto in H e con l'angolo BAH = α perché corrispondenti rispetto alle parallele AH e asse x. D'altra parte $\overline{HB} = f(x) - f(x_0) = \sin\alpha$ e $\overline{AH} = x - x_0 = \cos\alpha$.

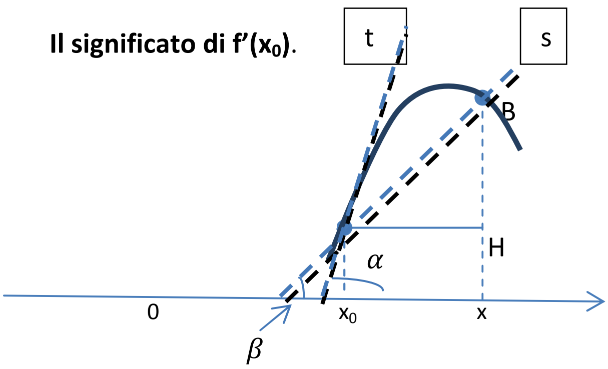
Quindi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $=tg\alpha$

In generale **<u>DEFINIZIONE</u>** di **Rapporto incrementale**

Data una funzione y = f(x), definita in un intervallo [a ; b] e due numeri reali x_0 e x interni ad [a ; b], si chiama rapporto incrementale di f(relativo a x_0) il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ed è il coefficiente angolare della retta secante la curva nei punti A(x_0 ; f(x_0)) e B(x; f(x)).

Osservazione: in generale il rapporto incrementale dipende dall'incremento ma se la funzione è lineare(y = mx + q) allora è costante ed è uguale ad m.

Il significato di f'(x_0).



Disegniamo ora la retta t tangente alla curva in A e osserviamo che attribuendo ad x valori sempre più prossimi ad x_0, il punto B tende a coincidere con A e la secante s con la tangente t e quindi, il coefficiente angolare di s(e cioè il rapporto incrementale), tende al coefficiente angolare di t e cioè a tgα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = m_t = tg\alpha$$

Se infine ricordiamo la definizione di derivata(vedi dopo) e cioè: $\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)$ si ha: **"la derivata di una funzione in un punto x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto di ascissa x_0".**

$$\boldsymbol{f'(x_0)=m_t=tg\alpha}$$

<u>DEFINIZIONE</u> di Derivata di una funzione

Data una funzione y = f(x), definita in un intervallo [a ; b], si chiama derivata della funzione nel punto x_0 interno all'intervallo, il limite, se esiste ed è finito, al tendere di x ad x_0, del rapporto incrementale di f relativo ad x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)\ =\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Se il limite non esiste (perché limite destro è diverso da limite sinistro)o perché è infinito, si dice che la funzione non è derivabile.

Esempio di calcolo di derivata in un punto x_0: Consideriamo la funzione $y=f(x)=x^2-4$ e calcoliamo la derivata in x_0 = 3.

f'(3) = $\lim_{x\to 3}\ \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ed essendo $f(x)=x^2-4$ e $f(3)=3^2-4=9-4=5$ si ha:

f'(3) = $\lim_{x\to 3}\ \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\ \frac{x^2-4-5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\ \frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}$ forma indeterminata

Per risolvere la forma indeterminata si scompone x^2-9 in fattori:

$$\lim_{x\to 3}\ \frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to}3\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}\ \ (x+3)=3+3=6$$

E quindi: f'(3) = 6 e cioè la derivata di una funzione in un punto x_0 è un numero

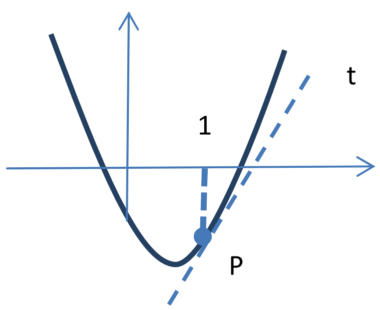
Osservazione La funzione che ad ogni x_0 associa $f'(x_0)$ è detta funzione derivata.

APPLICAZIONI DEL SIGNIFICATO GEOMETRICO DI DERIVATA:

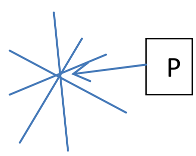
Determinazione della equazione della retta tangente a una curva in un suo punto

Esempio

Sia f(x) =$3x^2$ + 5x e x_0 = 1. Vogliamo l'equazione della tangente t alla curva nel punto P di ascissa 1



Basta ricordare l'equazione del fascio di rette di cento P:



$y-y_p\ =m(x-x_P)$ e ricordare che m = $f'(x_P)$ = f'(1) .

Essendo, poi, f' = 6x + 5 si ha : f'(1) = 6 *1 + 5 = 6+5 =11

E poiché y_P = f(1) = 3*1+5*1=3+5=8 si ha: $y-8=11(x-1)$ e cioè:

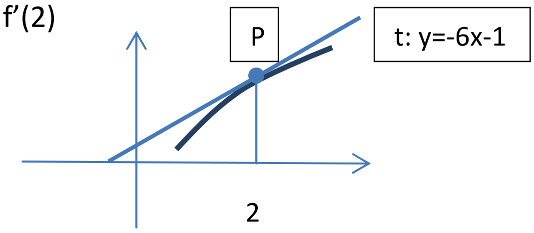
$y=11(x-1)+8; y=11x-11+8; y=11x-3$

Esempio

Sia $f(x) = 3x^2 + 5x$ e $x_0 = 1$. Vogliamo il coefficiente angolare della tangente t alla curva nel punto P di ascissa 1. Basta ricordare che $m_t = f'(x_P) = f'(1)$ ed essendo $f' = 6x + 5$ si ha : $f'(1) = 6 * 1 + 5 = 6+5 = 11$.

Esempio

Sia il seguente il grafico di una funzione f e t la tangente in $x_0 = 2$. Vogliamo la derivata di f in 2 e cioè $f'(2)$

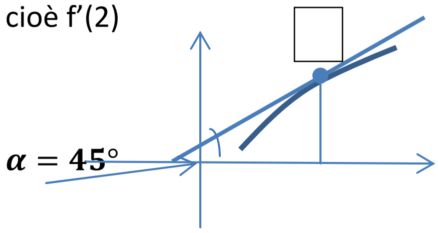


Basta ricordare che $\boldsymbol{f'(x_0) = m_t}$ e quindi

Si ha : $f'(2) = -6$

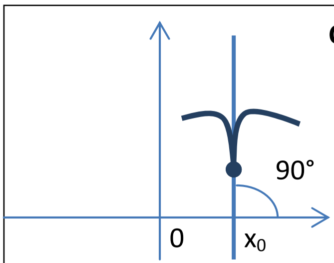
Esempio

Sia il seguente il grafico di una funzione f e t la tangente in $x_0 = 2$. Vogliamo la derivata di f in 2 e cioè $f'(2)$



PUNTI IN CUI UNA FUNZIONE NON è DERIVABILE

CUSPIDE



Nel punto di ascissa x_0 la tangente

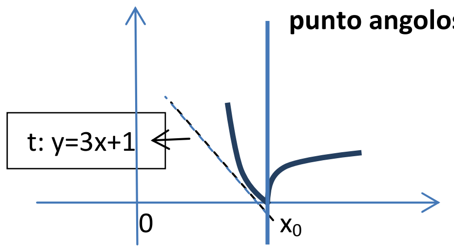
al grafico è parallela all'asse y e quindi

$\alpha = 90°$ e quindi tg α = tg90°=∞ e

quindi $f'(x_0)$ = tg α = tg90°=∞.

Pertanto la funzione non è derivabile in x_0.

punto angoloso



Nel punto di ascissa x_0 la tangente al grafico a destra è parallela all'asse y e quindi $\alpha = 90°$ e quindi tg α = tg90°=∞ e quindi $f'(x_0)$ = tg α = tg90°=∞. La tangente a sinistra è la retta t e quindi $f'(x_0) = 3$. Poiché derivata destra e sinistra sono diverse la funzione non è derivabile