

Turbomacchine

Esercitazione sulle Turbine assiali



Prof. Andrea Arnone
Prof. Roberto Pacciani

Studente:
Miguel Alfonso Mendez

Introduzione

$$R_g=287 \text{ [j/Kkg]}$$
$$\gamma=1,35$$
$$c_p=1,218 \text{ [kj/Kkg]}$$

$$p_{01}=1165,238 \text{ [kPa]}$$
$$T_{01}=1520 \text{ [K]}$$
$$\rho_{01}=1000 \cdot p_{01} / (R_g \cdot T_{01})$$

$$m=28,167 \text{ [kg/s]}$$
$$W_{\text{stadio}}=3770 \text{ [kW]}$$
$$r.p.m.=12605$$
$$\omega=r.p.m \cdot 2 \cdot \pi / 60 \text{ [rad/s]}$$
$$u=\omega \cdot r_m \text{ [m/s]}$$

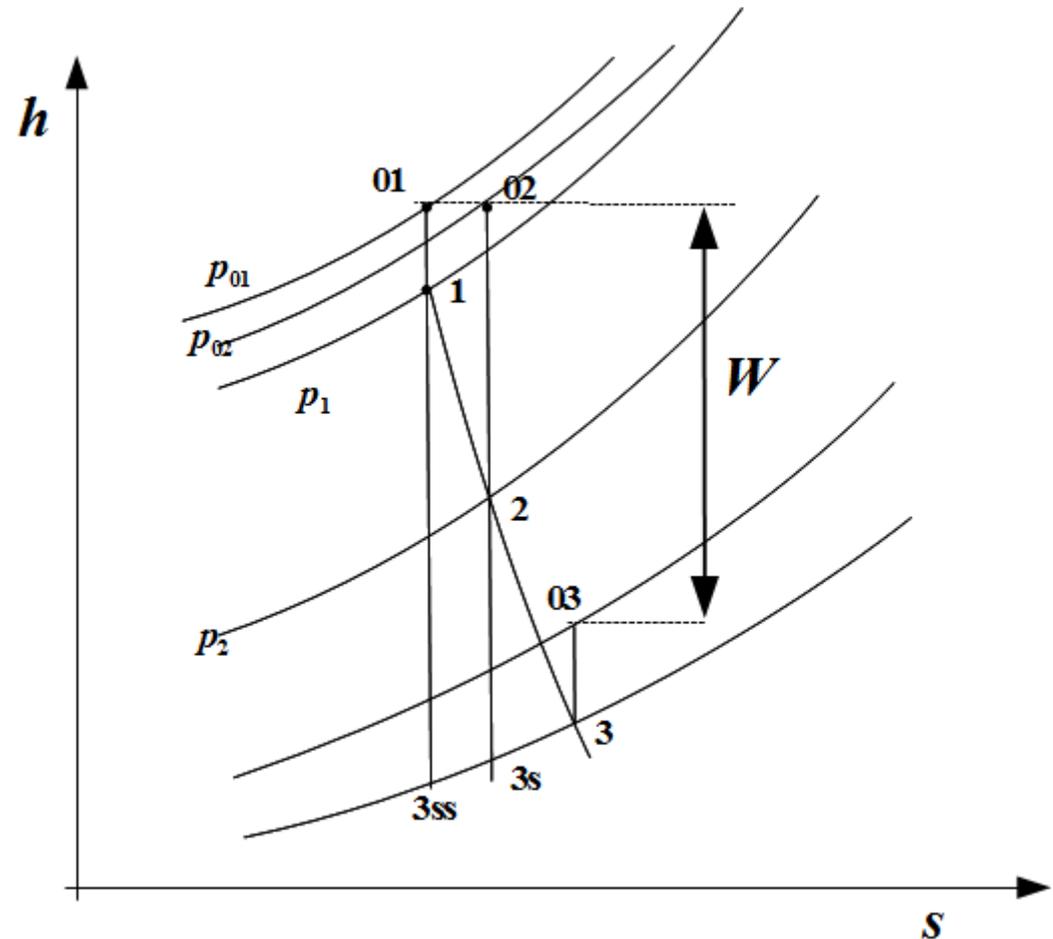
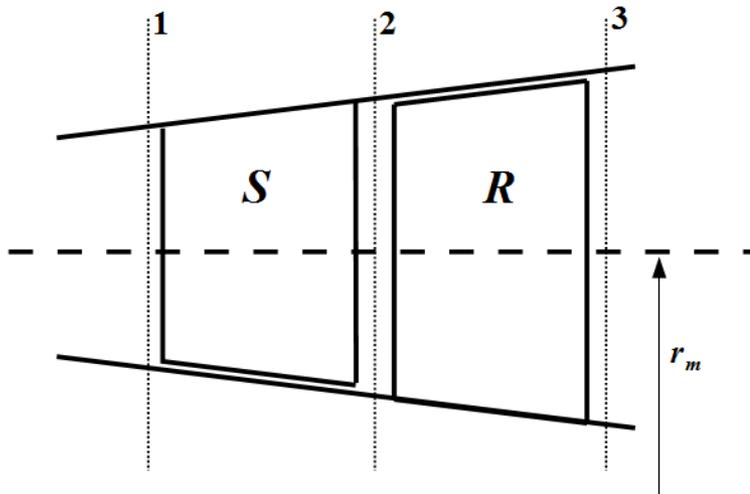
$$\Delta h_0 = W_{\text{stadio}} / m \text{ [kj/kg]}$$
$$R=0,5$$

$$r_m=0,175 \text{ [m]}$$
$$h=0,066 \text{ [m]}$$

- Nel presente lavoro vengono utilizzati due diversi approcci "quasi tridimensionali" per calcolare la variazione degli angoli di flusso dalla radice all'estremità di uno stadio di turbina a gas.
- Come nelle altre esercitazioni viene utilizzato il codice di calcolo EES, le cui righe vengono riportate in blu.
- Sono noti i raggi all'ingresso, le condizioni termodinamiche totali, la portata, la potenza erogata dallo stadio e la velocità di rotazione

Diagramma $h-s$, pedici

- Sul piano $h-s$ e su una vista laterale semplificata della macchina si utilizzano i soliti pedici 1,2,3.



- Il criterio sarà quello di mantenere il diametro medio costante, variando tip e hub

Condizioni Statiche Ingresso-1

- Vengono calcolate attraverso il seguente ciclo iterativo:

"Geometria"

$$r_m = 0,175$$

$$r_{1t} = 0,066 + r_{1h}$$

$$r_{1t} + r_{1h} = 2 * r_m$$

$$A_1 = \pi * (r_{1t}^2 - r_{1h}^2)$$

- Con i dati a disposizione è possibile ricavare l'area di passaggio.

"Grandezze Statiche"

$$c_{1l} = c_{1x}$$

- Si fissa $\alpha_1 = 0$, imponendo la velocità di ingresso assiale

$$c_{1xi} = 147,8$$

$$T_1 = T_{01} - c_{1xi}^2 / (2 * c_p * 1000)$$

- Si ipotizza un valore di tale velocità. Con questo si ricava la temperatura statica.

$$p_1 = p_{01} * (T_1 / T_{01})^{(\gamma / (\gamma - 1))}$$

$$\rho_1 = p_1 * 1000 / (R_g * T_1)$$

$$c_{1xii} = m / (A_1 * \rho_1)$$

$$c_{1x} = c_{1xi}$$

- Dalla temperatura statica si ottiene la pressione statica. Con queste due grandezze si calcola la densità. Nota la geometria e la portata massica si ricava un nuovo valore della velocità assiale e si ripete il ciclo fino a che non si ha $c_{1xi} = c_{1xii}$.

Condizioni Statiche Ingresso-2

- Si ottengono i seguenti risultati:

$$A_1 = 0,07257 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$c_{1x} = 147,8 \text{ [m/s]}$$

$$\omega = 1320 \text{ [rad/s]}$$

$$\phi = 0,6398$$

$$\psi = 2,508$$

$$\rho_1 = 2,626 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$T_1 = 1511 \text{ [K]}$$

$$p_1 = 1139 \text{ [kPa]}$$

$$Ma_1 = 0,1932$$

$$u = 231 \text{ [m/s]}$$

- Essendo:

$$\phi = c_{1x}/u$$

$$\psi = \Delta h_0 \cdot 1000 / u^2$$

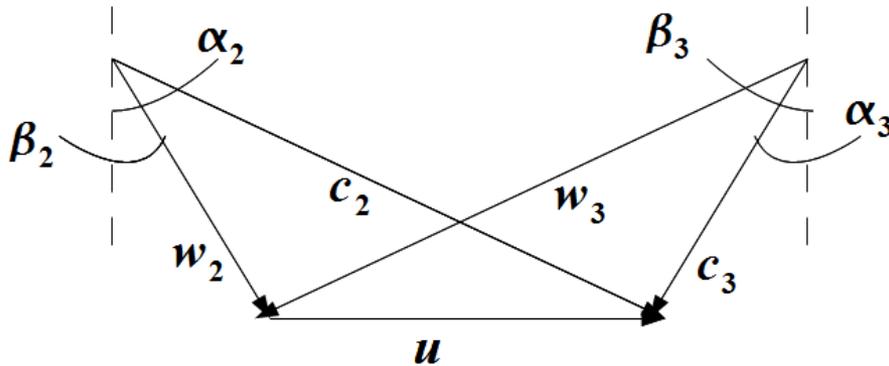
$$Ma_1 = c_{1x} / \sqrt{\gamma \cdot R_g \cdot T_1}$$

- Per lo stadio in esame essendo noto R , ψ è possibile risolvere il triangolo di velocità nel raggio medio. Dall'espressione del grado di reazione si ha:

$$R = 1 + \frac{\phi}{2} (\tan(\alpha_3) + \tan(\alpha_2)) \begin{cases} \rightarrow \tan(\alpha_3) = \frac{1}{2\phi} (\psi + 2R - 2) \\ \rightarrow \tan(\alpha_2) = \frac{1}{2\phi} (\psi - 2R + 2) \end{cases}$$

Triangoli di velocità

- Si utilizzerà la convenzione di prendere gli angoli rispetto alla direzione assiale. Considerando ad esempio il triangolo di velocità nella mean line ($R=0,5$) si ha:



$$\tan(\alpha_2) = 1/(2 \cdot \phi) \cdot (\psi - 2R + 2)$$

$$\tan(\alpha_3) = 1/(2 \cdot \phi) \cdot (\psi + 2R - 2)$$

$$c_2 = c_{1x} / \cos(\alpha_2)$$

$$c_{\theta 2} = c_{1x} \cdot \tan(\alpha_2)$$

$$c_3 = c_{1x} / \cos(\alpha_3)$$

$$c_{\theta 3} = c_{1x} \cdot \tan(\alpha_3)$$

$$W_{\text{eulero}} = u \cdot (c_{\theta 2} + c_{\theta 3}) / 1000$$

$$w_{\theta 2} = c_{\theta 2} - u$$

$$w_{\theta 3} = c_{\theta 3} + u$$

$$\beta_2 = \arctan(w_{\theta 2} / c_{1x})$$

$$\beta_3 = \arctan(w_{\theta 3} / c_{1x})$$

$$w_2 = \sqrt{w_{\theta 2}^2 + c_{1x}^2}$$

$$w_3 = \sqrt{w_{\theta 3}^2 + c_{1x}^2}$$

- Il triangolo di velocità al diametro medio risulta quindi definito:

$$\alpha_3 = \beta_2 = 49,69$$

[deg]

$$\beta_3 = \alpha_2 = 69,96$$

[deg]

$$c_2 = w_3 = 431,3 \text{ [m/s]}$$

Sezioni di passaggio -1

- Occorre fare un ipotesi sul rendimento della macchina. Per semplicità in prima approssimazione si considera un rendimento isoentropico di 0,9 sia per lo statore che per il rotore.

"Punto 2"

$$T_{01}=T_{02}$$

$$T_2=T_{02}-c_2^2/(2000*c_p)$$

$$Ma_2=c_2/\sqrt{\gamma*R_g*T_2}$$

- Dal triangolo di velocità si ricava T_2 e dunque il numero di Mach all'uscita

"Salto Entalpico Statore"

$$\Delta h_{12}=(c_2^2-c_1^2)/2$$

$$\eta_{Sis}=0,9$$

$$\eta_{Sis}=(T_1-T_2)/(T_1-T_{2is})$$

- Si ricava T_{2is} dalla definizione di rendimento isoentropico, dunque la pressione statica e la densità

$$T_{2is}/T_1=(p_2/p_1)^{((\gamma-1)/\gamma)}$$

$$\rho_2=p_2*1000/(R_g*T_2)$$

Sezioni di passaggio -2

$$W_{\text{eulero}} = c_p \cdot (T_{01} - T_{03})$$

$$T_{03} = T_{01} - c_p \cdot (2000)$$

$$\eta_{\text{Ris}} = 0,9$$

$$\eta_{\text{Ris}} = (T_{01} - T_{03}) / (T_{01} - T_{03is})$$

$$T_{03is} / T_{01} = (p_{03} / p_{01})^{((\gamma - 1) / \gamma)}$$

$$\rho_{03} = p_{03} \cdot 1000 / (R_g \cdot T_{03})$$

- Dal lavoro di eulero si ricava T_{03} , dunque come prima la densità in uscita.

- È possibile quindi calcolare l'altezza di palettatura nei tre punti:

$$\rho_{01} \cdot A_1 = \rho_{02} \cdot A_2$$

$$\rho_{02} \cdot A_2 = \rho_{03} \cdot A_3$$

$$A_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_m \cdot h_1$$

$$A_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_m \cdot h_2$$

$$A_3 = 2 \cdot \pi \cdot r_m \cdot h_3$$

Le altezze delle pale ottenute sono:

$$h_1 = 66 \text{ mm}$$

$$h_2 = 76,71 \text{ mm}$$

$$h_3 = 87,26 \text{ mm}$$

Analisi quasi 3-d

- Si considerano i seguenti raggi:

$$r_{2t} = r_m + h_2/2$$

$$r_{2h} = r_m - h_2/2$$

$$r_{3t} = r_m + h_3/2$$

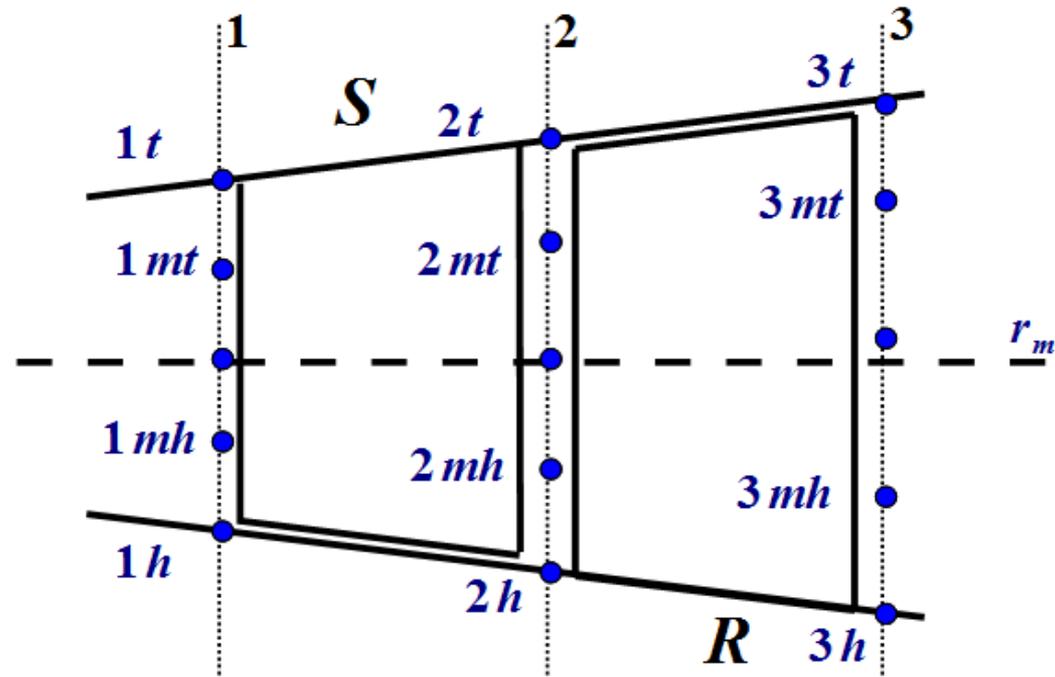
$$r_{3h} = r_m - h_3/2$$

$$r_{2mt} = r_m + h_2/4$$

$$r_{2mh} = r_m - h_2/4$$

$$r_{3mt} = r_m + h_3/4$$

$$r_{3mh} = r_m - h_3/4$$



- Poiché i punti omonimi non avranno lo stesso raggio le velocità tangenziali u saranno diverse. Per esempio u_{2mt} è diverso da u_{3mt} . Di conseguenza nel triangolo di velocità come mostrato prima si mette il valore medio per ciascun altezza.

Teoria dell'equilibrio radiale

- La combinazione delle equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto, dell'energia insieme con l'equazione dell'entropia e la legge di stato dei gas perfetti porta all'equazione dell'equilibrio radiale:

$$\nabla h_0 = \vec{F} + T \nabla s + \vec{c} x (\nabla x \vec{c}) - \frac{\delta \vec{c}}{\delta t} + v [\nabla^2 \vec{c} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{c})]$$

- Tale equazione esprime il gradiente istantaneo di entalpia di ristagno in un punto in funzione di:

\vec{F} Forza per unità di massa che la palettatura imprime al volume di controllo [N/kg]

$T \nabla s$ Gradiente di entropia e T (statica)
in [K] s in [j/kgK]

$v [\nabla^2 \vec{c} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{c})]$ Termine legato agli sforzi viscosi, con u in [m²/s]

$\frac{\delta \vec{c}}{\delta t}$ Termine legato all'instazionarietà del moto

Teoria dell'equilibrio radiale semplificata-1

➤ Le principali ipotesi semplificative sono:

1. *Analizzando il volume di controllo (V.C) interno al condotto palare non si risente dell'effetto della forza F.*
2. *Il campo di moto si suppone stazionario*
3. *Poiché il V.C è lontano dalle superfici della pala (quindi dallo strato limite) può essere considerato non viscoso.*

➤ Per cui l'equazione diventa: $\nabla h_0 = T \nabla s + c_x (\nabla x c^2)$

➤ Utilizzando le coordinate cilindriche si ottengono tre equazioni, in cui si ipotizza che:

1. *Il flusso è perfettamente assialsimmetrico* $\frac{\delta}{\delta \theta} = 0$

2. *Il numero delle pale è infinito*

3. *Gradiente della componente radiale in direzione assiale nullo* $\frac{\delta c_r}{\delta x} = 0$

4. *Gradiente radiale di entropia nullo* $\frac{\delta s}{\delta r} = 0$

Teoria dell'equilibrio radiale semplificata-2

- Si ottiene finalmente l'equazione dell'equilibrio radiale semplificata:

$$\frac{dh_0}{dr} = c_x \frac{dc_x}{dr} + \frac{c_\theta}{r} \frac{d(rc_\theta)}{dr}$$

- La risoluzione di tale equazione richiede l'imposizione di condizioni al contorno che rappresentano il criterio di progetto utilizzato per il calcolo della pala.
- Per ciascun raggio viene considerata un'analisi bidimensionale, grazie all'ipotesi di assial-simmetria del flusso. La soluzione del flusso tridimensionale è quindi una combinazione di soluzioni 2-d nei piani meridionali e circonferenziali.
- Nella presente esercitazione vengono utilizzati il criterio "Free-Vortex" per statore e rotore e "alpha_2 costante+ Free Vortex"

Free Vortex-1

- Si ipotizza che la variazione di entalpia di ristagno lungo il raggio sia nulla. La cosa implica quindi che la velocità assiale è costante e che la componente tangenziale della velocità assoluta vari in maniera inversamente proporzionale con il raggio:

$$\frac{dc_x}{dr} = 0$$

$$\frac{d(rc_\theta)}{dr} = 0$$

- Esprimendo il rotore di c in coordinate cilindriche si osserva rapidamente che tali ipotesi portano a un flusso irrotazionale $\nabla \times \vec{c} = 0$

- Applicando quanto detto sulla sezione 2 si ha:

$$r_m \cdot c_{\theta 2} = K_{\theta 2}$$

$$c_{1x} = K_x$$

$$r_{2t} \cdot c_{\theta 2t} = K_{\theta 2}$$

$$r_{2h} \cdot c_{\theta 2h} = K_{\theta 2}$$

$$r_{2mt} \cdot c_{\theta 2mt} = K_{\theta 2}$$

$$r_{2mh} \cdot c_{\theta 2mh} = K_{\theta 2}$$

- Partendo dal triangolo nella mean line si ricava la componente c_{θ} ad ogni raggio precedentemente mostrato

Free Vortex-2

- Le stesse linee di codice vanno poi applicate alla sezione 3 (basterà sostituire i pedici). I triangoli di velocità in ingresso e in uscita sono quindi calcolati applicando le seguenti righe di codice (a titolo di esempio si riporta il calcolo fatto per il tip della sezione 2) con gli opportuni pedici:

$$u_{t2} = \omega \cdot r_{t2}$$

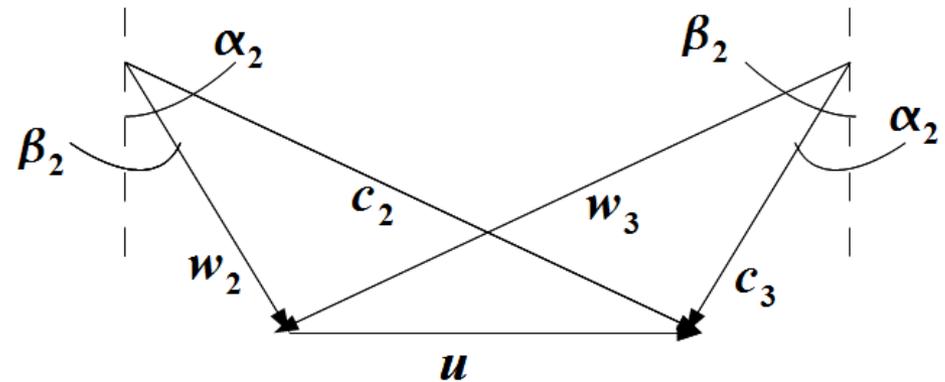
$$w_{\theta t2} = c_{\theta t2} - u_{t2}$$

$$w_{2t} = \sqrt{K_x^2 + w_{\theta t2}^2}$$

$$c_{2t} = \sqrt{K_x^2 + c_{\theta t2}^2}$$

$$\beta_{2t} = \arctan(w_{\theta t2} / K_x)$$

$$\alpha_{2t} = \arctan(c_{\theta t2} / K_x)$$



Si ritiene opportuno evidenziare come nella convenzione dei triangoli usata non esista una sola u . Nel tip ad esempio:

$$u_{t2} \neq u_{t3}$$

Risultati Free Vortex

- Vengono qui riportati i risultati ottenuti con l'approccio Free Vortex per l'ingresso e l'uscita. (le velocità sono ovviamente in m/s e gli angoli in deg)

	alpha2	alpha3	beta2	beta3	c2	c3	w2	w3	u2	u3
h	74,1	57,51	66,42	69,97	539,6	275,1	369,4	431,6	180,4	173,4
mh	72,01	53,4	59,35	69,78	478,5	247,9	289,9	427,6	205,7	202,2
m	69,96	49,69	49,69	69,96	431,3	228,5	228,5	431,3	231	231
mt	67,97	46,34	36,38	70,38	394	214,1	183,6	440,2	256,3	259,8
t	66,03	43,33	18,94	70,95	363,7	203,2	156,3	452,8	281,6	288,6

- Per semplificare le cose si considera una velocità u pari al valor medio tra 2 e 3. In questo modo si è calcolato l'andamento del grado di reazione dalla radice alla testa e sono stati disegnati i triangoli all'hub, al mean e al tip.

Variazione angoli, R , Mach -1

- Si sono costruite delle tabelle a partire dalle seguenti righe di codice:

$$R_h = (w_{3h}^2 - w_{2h}^2) / ((u_{h2} + u_{h3}) * (c_{\theta 2h} + c_{\theta 3h}))$$

$$R_{mh} = (w_{3mh}^2 - w_{2mh}^2) / ((u_{mh2} + u_{mh3}) * (c_{\theta 2mh} + c_{\theta 3mh}))$$

$$R_{05} = (w_3^2 - w_2^2) / ((u + u) * (c_{\theta 2} + c_{\theta 3}))$$

$$R_{mt} = (w_{3mt}^2 - w_{2mt}^2) / ((u_{mt2} + u_{mt3}) * (c_{\theta 2mt} + c_{\theta 3mt}))$$

$$R_t = (w_{3t}^2 - w_{2t}^2) / ((u_{t2} + u_{t3}) * (c_{\theta 2t} + c_{\theta 3t}))$$

$$Ma_{c3h} = c_{3h} / \sqrt{R_g * \gamma * T_3}$$

$$Ma_{c3mh} = c_{3mh} / \sqrt{R_g * \gamma * T_3}$$

$$Ma_{c3m} = c_3 / \sqrt{R_g * \gamma * T_3}$$

$$Ma_{c3mt} = c_{3mt} / \sqrt{R_g * \gamma * T_3}$$

$$Ma_{c3t} = c_{3t} / \sqrt{R_g * \gamma * T_3}$$

$$Ma_{w2h} = w_{2h} / \sqrt{R_g * \gamma * T_2}$$

$$Ma_{w2mh} = w_{2mh} / \sqrt{R_g * \gamma * T_2}$$

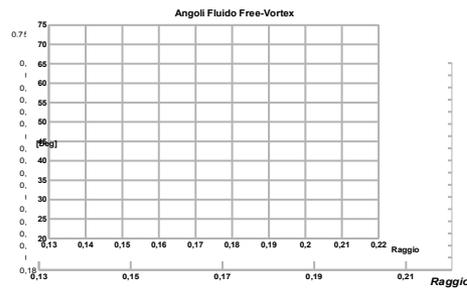
$$Ma_{w2m} = w_2 / \sqrt{R_g * \gamma * T_2}$$

$$Ma_{w2mt} = w_{2mt} / \sqrt{R_g * \gamma * T_2}$$

$$Ma_{w2t} = w_{2t} / \sqrt{R_g * \gamma * T_2}$$

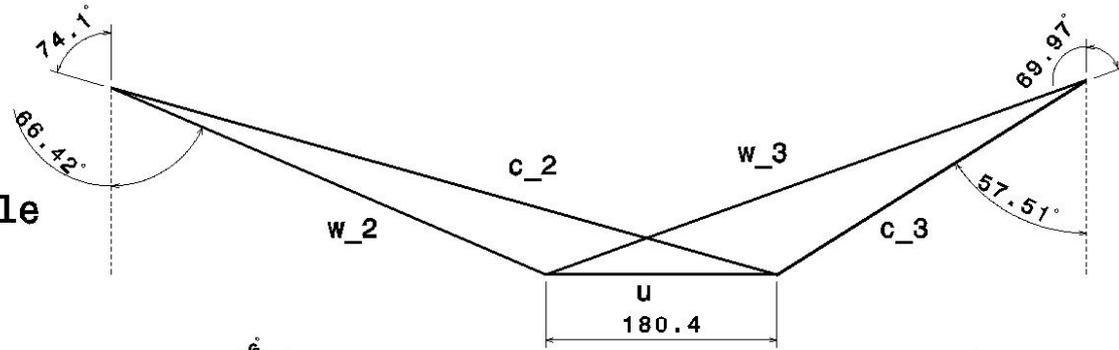
- Ottenendo l'andamento approssimato del grado di reazione (valutato a una u media) e i numeri di mach su c_3 e w_2

Variazione angoli, R , Mach -1

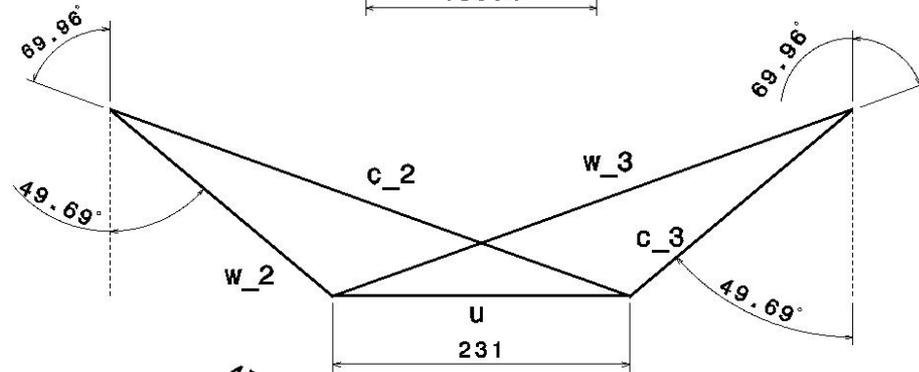


Triangoli h-m-t

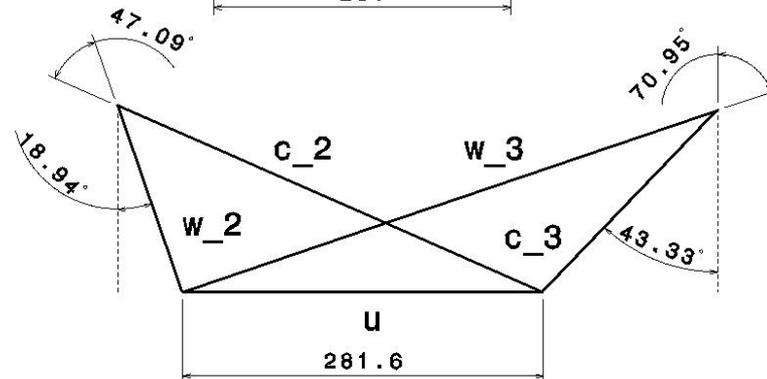
Hub Radius Triangle



Mean Radius Triangle



Tip Radius Triangle



Alpha_2 costante-1

- Si sceglie di utilizzare una palettatura dritta per lo statore, mantenendo l'angolo di uscita costante. Imponendo quindi tali condizioni all'equazione dell'equilibrio radiale si ha:

$$\tan(\alpha_2) = \text{cost} \quad c_{\theta 2} = \tan(\alpha_2) c_{x2}$$

$$\frac{dh_{02}}{dr} = c_{x2} \frac{dc_{x2}}{dr} + \frac{c_{x2}}{r} \tan(\alpha_2) \frac{d(rc_{x2} \tan(\alpha_2))}{dr}$$

- Imponendo che $\frac{dh_{02}}{dr} = 0$ e integrando si ha:

$$c_{\theta 2} r^{\sin^2(\alpha_2)} = K_{\theta 2}$$

Alpha_2 costante-2

$$K=(\sin(\alpha_2))^2$$

$$r_m^K \cdot c_{\theta 2} = K_{\theta 2}$$

$$r_{2t}^K \cdot c_{\theta 2t} = K_{\theta 2}$$

$$c_{x2t} = c_{\theta 2t} / \tan(\alpha_2)$$

$$u_{t2} = \omega \cdot r_{2t}$$

$$w_{\theta 2t} = c_{\theta 2t} - u_{t2}$$

$$w_{2t} = \sqrt{c_{x2t}^2 + w_{\theta 2t}^2}$$

$$c_{2t} = \sqrt{c_{x2t}^2 + c_{\theta 2t}^2}$$

$$\beta_{2t} = \arctan(w_{\theta 2t} / c_{x2t})$$

$$\alpha_{2t} = \arctan(c_{\theta 2t} / c_{x2t})$$

- Si riporta a titolo di esempio il codice del solo tip nel punto 2. Per gli altri punti il tutto è esattamente identico. Si noti che è qui necessario calcolare la componente assiale che non è più costante lungo il raggio.

- La costante viene calcolata sul raggio medio. Di lì si ricava la $c_{\theta 2t}$, quindi c_{x2t} . Il resto è identico a quanto già visto

Alpha_2 costante

- La sola imposizione di pala dritta per lo statore non permette di chiudere il problema dell'analisi tridimensionale di tutto lo stadio. Solitamente a questa condizione viene accoppiata una delle due seguenti soluzioni:
 1. *Vortice libero all'uscita del rotore*
 2. *Velocità in uscita fissata ad un certo valore (ovviamente piccolo, tendente a $\alpha_3=0$)*

- Nel presente lavoro si utilizzerà per la prima soluzione.

- Come già visto la velocità assiale nella sezione due non è costante mentre dovrà esserlo nella sezione 3. Come valore si fissa la velocità assiale precedente, ovvero quella del raggio medio nella sezione 2. In questo modo il tutto resta praticamente identico a quanto visto per il primo approccio e l'unica differenza starà nel triangolo nella sezione 2

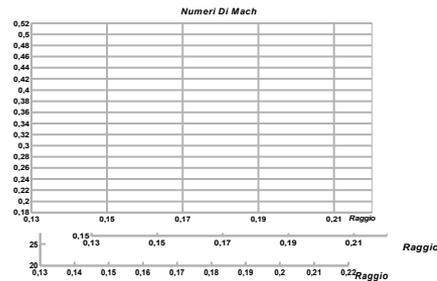
Risultati Alpha_2 Cost

- Si ottengono i seguenti risultati, con le solite unità di misura.

	alpha2	alpha3	beta2	beta3	c2	c3	w2	w3	u2	u3
h	69,96	57,51	60,4	69,97	536,6	275,1	372,3	431,6	180,4	173,4
mh	69,96	53,4	56,05	69,78	477,9	247,9	293,2	427,6	205,7	202,2
m	69,96	49,69	49,69	69,96	431,3	228,5	228,5	431,3	231	231
mt	69,96	46,34	40,05	70,38	393,5	214,1	176,2	440,2	256,3	259,8
t	69,96	43,33	25,26	70,95	362,1	203,2	137,2	452,8	281,6	288,6

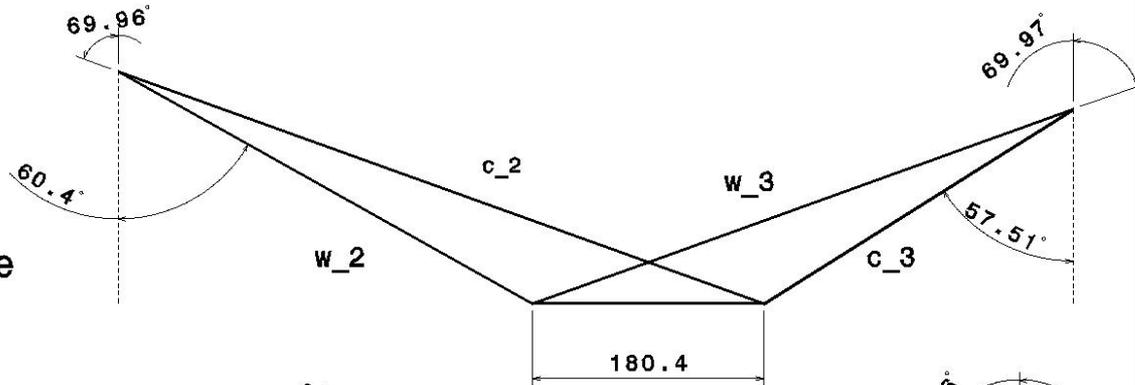
- Quanto fatto precedentemente per la prima soluzione viene qui ripetuto.
- Si mostrano di seguito gli andamenti di tutti i parametri fluidodinamici di interesse al variare del raggio.

Variazione angoli, R , Mach -1

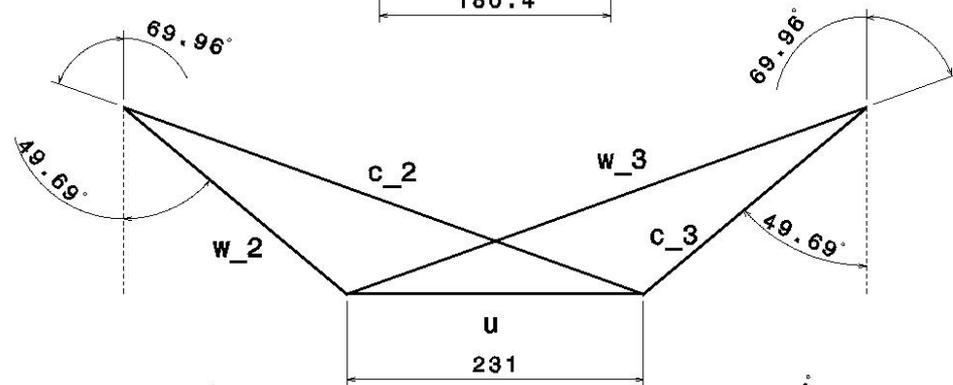


Triangoli h-m-t

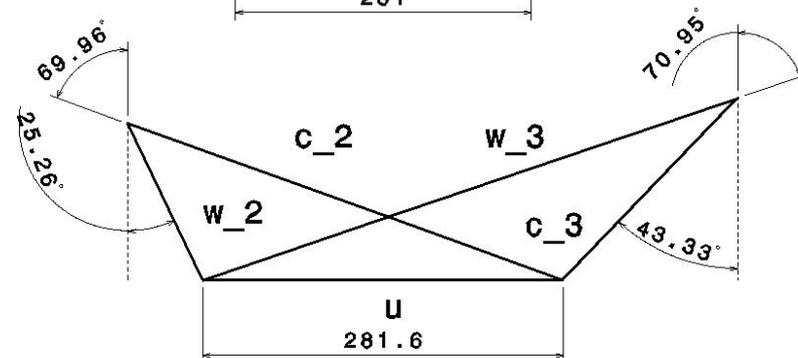
Hub Radius Triangle



Mean Radius Triangle



Tip Radius Triangle



Bibliografia

- [1] **Antonio Muñoz Blanco**, *"Turbomáquinas Térmicas"*, Sintesis, Madrid, 2004
- [3] **Giuseppe Ventrone**, *"Le Turbomacchine"*, Cortina, Padova, 1986
- [4] **Carlo Osnaghi**, *"Teoria delle Turbomacchine"*, Leonardo, Bologna, 2002
- [5] **Oreste Acton**, *"Turbomacchine"*, UTET, Genova, 1985
- [6] **S.L. Dixon**, *"Fluid mechanics, Thermodynamics of Turbomachinery"*, Elsevier Inc, 1998.