| RIEPILOGO | LE FUNZIONI | |
|---|---|---|

**1)** Una ***funzione*** dall'insieme A all'insieme B è una relazione che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno ed uno solo elemento $y \in B$. Si può scrivere $y = f(x)$ oppure $f : A \to B$.

**2)** La $x$ è chiamata variabile indipendente; la $y$ è chiamata variabile dipendente.

**3)** Il ***Dominio*** o Campo di Esistenza di $y = f(x)$ è l'insieme dei valori di *x* per i quali la funzione è definita, cioè è possibile calcolarne il valore.

**4)** Se $y \in B$ è associato a $x \in A$ dalla funzione $y = f(x)$ si dice che *y* è l'***immagine*** di *x* e che *x* è la ***controimmagine*** di *y*.

**5)** Il ***Codominio*** di una funzione è l'insieme dei valori di $y \in B$ per ciascuno dei quali esiste almeno un $x \in A$ tale che $y = f(x)$.

**6)** Le ***funzioni numeriche*** hanno come dominio e codominio un sottoinsieme di $R$ (a volte *R* stesso). Esse sono anche dette ***funzioni reali di variabile reale*** e sono rappresentate da una formula matematica.

**7)** Una funzione è ***algebrica*** quando sono presenti soltanto le quattro operazioni, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice. Se sono presenti anche operazioni quali esponenziali e logaritmi si dice ***trascendente***.

**8)** Una funzione algebrica può essere ***razionale intera*** o polinomiale se è espressa mediante un polinomio nella variabile *x*; se la variabile *x* compare al denominatore si chiama ***razionale fratta*** ; in presenza di radici l'aggettivo razionale viene sostituito da ***irrazionale***.

**9)** Una funzione da A in B si dice ***iniettiva*** se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, cioè se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

**10)** Una funzione si dice ***suriettiva*** se ogni elemento $y \in B$ è immagine di almeno un elemento $x \in A$.

**11)** Una funzione si dice ***biettiva*** o ***biezione*** o ***corrispondenza biunivoca*** se è sia ***iniettiva*** che ***suriettiva***.

**12)** Una funzione ammette ***funzione inversa*** solo se è biettiva. Essa si indica con $f^{-1}(x)$.

**13)** Una funzione è ***crescente*** in un determinato intervallo (insieme di valori) se vale la relazione $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

**14)** Una funzione è ***decrescente*** in un determinato intervallo (insieme di valori) se vale la relazione $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

**15)** Una funzione è ***pari***, cioè simmetrica rispetto all'asse Y se $f(-x) = f(x)$.

**16)** Una funzione è ***dispari***, cioè simmetrica rispetto all'origine degli assi se $f(-x) = -f(x)$.

**17)** Un ***intervallo limitato*** è l'insieme dei valori di *x* compresi tra *a* e *b*. I casi possibili sono: intervallo aperto $a < x < b$ ; intervallo chiuso $a \le x \le b$ ; intervallo aperto a destra $a \le x < b$ ; intervallo aperto a sinistra $a < x \le b$ .

**18)** Un ***intervallo illimitato*** è l'insieme dei valori che precedono o seguono il valore *a*: illimitato superiormente $x > a$ oppure $x \ge a$ ; illimitato inferiormente $x < a$ oppure $x \le a$ .

**19)** Dato un numero reale $x_0$ si chiama ***intorno completo*** di $x_0$ un qualunque intervallo aperto contenente $x_0$ .

**20)** Dato un numero reale $x_0$ ed un numero positivo $\delta$ si chiama ***intorno circolare*** di $x_0$ di raggio $\delta$ l'intervallo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ di cui $x_0$ è il punto medio.

**21)** Si chiama ***intorno destro*** di $x_0$ l'intervallo $x_0 < x < x_0 + \delta$ ; ***intorno sinistro*** di $x_0$ l'intervallo $x_0 - \delta < x < x_0$ .

**22)** Si dice che $x_0$ appartenente ad un insieme A è un ***punto isolato*** se esiste almeno un intorno di $x_0$ che non contiene elementi di A.

**23)** Si dice che un punto $x_0$ è un ***punto di accumulazione*** di A se ogni intorno di $x_0$ contiene infiniti punti di A [ $x_0$ può anche non appartenere ad A].

**24)** Una funzione è ***limitata superiormente*** se tutti i valori che essa assume sono minori o uguali di un certo valore *h*; è ***limitata inferiormente*** se tutti i valori che essa assume sono maggiori o uguali di un certo valore *k*.

**25)** Una funzione $y = f(x)$ possiede in $H(x_0 . y_0)$ un punto di ***massimo relativo*** se in un intorno di $x_0$ si ha $f(x) \le f(x_0)$ ; si ha un ***minimo relativo*** se $f(x) \ge f(x_0)$ .

**26)** Una funzione $y = f(x)$ possiede in $H(x_0 . y_0)$ un punto di ***massimo assoluto*** se in tutto il dominio si ha $f(x) \le f(x_0)$ ; si ha un ***minimo assoluto*** se in tutto il dominio $f(x) \ge f(x_0)$ .

**27)** Una retta *r* è un asintoto per la funzione $y = f(x)$ se la distanza tra la retta e la funzione diminuisce indefinitamente, senza mai annullarsi (cioè retta e grafico della funzione non si toccheranno mai).

**28)** La scrittura $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, con $l$ finito significa che $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists \partial > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \partial, x_0 + \partial)$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$.

**29)** ***Forme indeterminate di limiti:*** $\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$

**30)** ***Limiti notevoli*** : $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$

$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ dove $\ln x = \log_e x$

**31)** ***Teorema dell'unicità del limite:*** se il limite di una funzione $f(x)$ ,per $x \to x_0$, esiste, allora esso è unico.

**32)** ***Teorema della permanenza del segno:*** se il limite di una funzione $f(x)$ ,per $x \to x_0$,è diverso da zero, allora esiste un intorno di $x_0$ nel quale la funzione ha lo stesso segno del limite.

**33)** ***Teorema del confronto:*** si considerino tre funzioni $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ aventi $x_0$ come punto di accumulazione. Si supponga che almeno in un intorno di $x_0$ si abbia $f(x) \le h(x) \le g(x)$ e che le due funzioni *f* e *g*, per $x \to x_0$, abbiano lo stesso limite *l*. Allora anche la funzione $h(x)$ ha lo stesso limite.

**34)** Una funzione è ***continua*** in un punto $x_0$ appartenente al suo dominio, se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ con *l* reale e finito corrispondente al valore della *f* nel punto $x_0$, cioè $f(x_0) = l$.

Una funzione è continua in un intervallo *I* se è continua in tutti i punti di tale intervallo.

***35) Discontinuità di prima specie:*** $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ sono numeri reali finiti e diversi.

***36) Discontinuità di seconda specie:*** almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ è infinito.

***37) Discontinuità di terza specie:*** $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ con l finito ma $f(x_0)$ non esiste.

Si parla di discontinuità eliminabile, in quanto si può assumere $f(x_0) = l$.

**38)** ***Teorema di Weierstrass:*** se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora ammette un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto in tale intervallo.

**39)** ***Teorema di Bolzano:*** se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.

**40)** ***Teorema di esistenza degli zeri:*** se una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui la funzione si annulla, cioè $f(c) = 0$.

**41)** Il ***rapporto incrementale*** di una funzione $f(x)$ relativo ad un suo punto di ascissa $x_0$ e all'incremento *h* è il quoziente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e corrisponde al coefficiente angolare della retta ***secante*** al grafico della $f(x)$ nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

**42)** La ***derivata prima*** di una funzione $f(x)$ in un suo punto di ascissa $x_0$ è il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale, al tendere a zero dell'incremento *h*, cioè $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e corrisponde al coefficiente angolare della retta ***tangente*** al grafico della $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.

**43)** Si può determinare l'equazione della retta tangente ad una curva di equazione $y = f(x)$ in un suo punto di ascissa $x_0$ mediante la formula $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

**44)** La ***derivata prima*** di una funzione $f(x)$ è una ***funzione***, ottenuta calcolando il limite del rapporto incrementale, riferito ad una *x* generica:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $\qquad$ Si può indicare anche con $y'$ oppure con $D[f(x)]$.

**45)** Si indica con ***derivata sinistra*** il valore $f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

**46)** Si indica con ***derivata destra*** il valore $f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

**47)** Una funzione è ***derivabile*** in un suo punto di ascissa $x_0$ se e solo se le due derivate sinistra e destra sono finite ed uguali tra loro. Una funzione è derivabile in un intervallo se lo è in tutti i punti dell'intervallo.

**48)** Nel caso in cui la derivata destra e la derivata sinistra siano finite ma diverse, la $f(x)$ ha nel punto $P(x_0, f(x_0))$un ***punto angoloso***.

**49)** Nel caso in cui tende a infinito almeno una delle due derivate destra o sinistra, la $f(x)$ ha nel punto $P(x_0, f(x_0))$una ***cuspide***.

**50)** Si dice ***punto stazionario*** per la funzione $f(x)$ un punto di ascissa $x_0$ in cui $f'(x_0) = 0$ .

**51)** ***Derivata di una funzione elementare:*** $D[k] = 0$ $D[x] = 1$

$D[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ (possiamo usarla non solo con *n* naturale, ma anche razionale qualsiasi)

$D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D[e^x] = e^x$ $D[\ln x] = \frac{1}{x}$

**52)** ***Regole di derivazione:*** $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$ $D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$D[f(h(x))] = f'(h(x)) \cdot h'(x)$

**53)** ***Teorema di De l'Hopital:*** siano date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite e derivabili in tutti i punti di un intorno *I* del punto *c* (finito o infinito): se il limite $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ ed è $g'(x) \neq 0$ allora $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

**54)** ***Teorema di Lagrange:*** Data una funzione $y = f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(a, b)$, esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che risulti:

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Geometricamente significa che esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui la tangente è parallela alla secante.

***55) Teorema di Rolle:*** Se una funzione $y = f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, derivabile nell'intervallo aperto $(a, b)$ ed assume valori uguali negli estremi dell'intervallo, cioè $f(a) = f(b)$ allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$ .
Geometricamente significa che esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui la tangente è orizzontale.

***56) Funzioni derivabili crescenti e decrescenti:***

Se in un intervallo *I* la derivata $f'(x) > 0$ allora la $f(x)$ è crescente in *I*;
Se in un intervallo *I* la derivata $f'(x) < 0$ allora la $f(x)$ è decrescente in *I*.

***57) Studio dei massimi e minimi relativi con la derivata prima***

Se una funzione $y = f(x)$ è derivabile in un intorno *I* del punto $x_0$ e si ha :

- se $f'(x) < 0$ per ogni $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x > x_0$ allora $x_0$ è l'ascissa di un punto di ***minimo relativo*** per la funzione;
- se $f'(x) > 0$ per ogni $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x > x_0$ allora $x_0$ è l'ascissa di un punto di ***massimo relativo*** per la funzione.